

基礎量子化学

2016年4月～8月

7月8日 第12回

担当教員:
福井大学大学院工学研究科生物応用化学専攻
前田史郎
E-mail: smaeda@u-fukui.ac.jp
URL: http://acbio2.acbio.u-fukui.ac.jp/phychem/maeda/kougi
教科書:
アトキンス物理化学(第8版)、東京化学同人
10章 原子構造と原子スペクトル
11章 分子構造

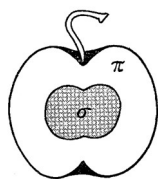
11章 分子構造

分子軌道法

多原子分子系の分子オービタル

11・6 ヒュッケル近似

ヘテロ原子を含むπ電子系



参考書:「基礎量子化学」, 菊池修, 朝倉書店(1997)

HMO計算プログラム: 首都大学東京 理工学研究科 波田雅彦教授
http://www.comp.tmu.ac.jp/theochem/lecture_information/lecture2.htmlに公開されています。 1

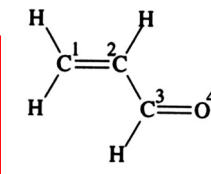
7月1日

問題: アクリルアルデヒド(アクロレイン)のヒュッケル分子軌道法について次の間に答えよ。

- (1) 永年方程式を書け。ただし、原子には図のように番号を付け、酸素原子に対するパラメータはストライトウィーザーがまとめた値を用いる。
- (2) 4個の分子軌道 $\phi[n]$ とその軌道エネルギー E を下に示す。アクリルアルデヒドの分子軌道ダイアグラムを描け。

(3) 各原子の電子密度と各結合の結合次数を求めよ。

	$\chi[1]$	$\chi[2]$	$\chi[3]$	$\chi[4]$	E
	C	C	C	O	
$\phi[1]$	0.228	0.429	0.577	0.657	$\alpha+1.879\beta$
$\phi[2]$	0.577	0.577	0.000	-0.577	$\alpha+1.000\beta$
$\phi[3]$	0.657	-0.228	-0.577	0.429	$\alpha-0.347\beta$
$\phi[4]$	0.429	-0.657	0.577	-0.228	$\alpha-1.532\beta$



アクリルアルデヒド

(4) C=C結合とC=O結合との共役による安定化エネルギーを計算して、エチレン、ホルムアルデヒドの結果と比較して議論せよ。

ヘテロ原子を含むπ電子系

窒素原子Nや酸素原子Oにも2pオービタルがあり、炭素原子Cとπ結合を作る。ヘテロ原子に対してさまざまなパラメータセットが提案されている。ストライトウィーザーがまとめた値を下の表に示す。 α_x はクーロン積分、 b_{xy} は共鳴積分のパラメータである。クーロン積分のN原子とO原子については、π電子系に供給される電子数によって2種類ある。共鳴積分についても原子間の結合様式によって値が異なっている。

表 6.2 ヘテロ原子のパラメータ

原子X	α_x	結合XY	b_{xy}
\dot{N}	0.5	CN	1.0
\ddot{N}	1.5	C-N	0.8
\dot{O}	1.0	C=O	1.0
\ddot{O}	2.0	C-O	0.8
F	3.0	N-O	0.7
Cl	2.0	C-F	0.7
Br	1.5	C-Cl	0.4
		C-Br	0.3

$$\alpha_X = \alpha + a_X \cdot \beta$$

ピリジンのN原子の場合

$$\alpha_N = \alpha + a_N \cdot \beta$$

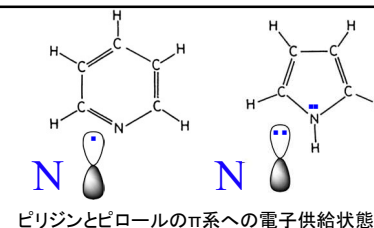
$$= \alpha + 0.5\beta$$

Streitwieser Jr., A.: Molecular Orbital Theory for Organic Chemists, John Wiley & Sons, New York (1961)

クーロン積分 $\alpha_x = \alpha + a_x \cdot \beta$ ピリジンとピロールを例にとる。

表 6.2 ヘテロ原子のパラメータ

原子X	α_x	結合XY	b_{xy}
\dot{N}	0.5	CN	1.0
\ddot{N}	1.5	C-N	0.8
\dot{O}	1.0	C=O	1.0
\ddot{O}	2.0	C-O	0.8
F	3.0	N-O	0.7
Cl	2.0	C-F	0.7
Br	1.5	C-Cl	0.4
		C-Br	0.3



ピリジンとピロールのπ系への電子供給状態



ピリジンとピロールのσ系への電子供給状態

ピリジンのN原子は sp^2 混成をしていて、2個の sp^2 混成軌道が隣接する炭素原子とσ結合を形成する。残りの sp^2 混成軌道には孤立電子対が入る。残りの1個の2p電子がπ電子系に供給される。したがって、 \dot{N} と表す。ピリジンは6π電子系である。一方、ピロールでは2個の2p電子がπ電子系に供給される。したがって、 $N:$ と表す。ピロールも6π電子系である。

共鳴積分 b_{xy} : b_{X-Y} は単結合, $b_{X=Y}$ は二重結合, b_{XY} は共役している分子内の結合の場合の値である.

$\beta_{XY} = b_{XY} \times \beta$ { カルボニル型は O
 エーテル型は O

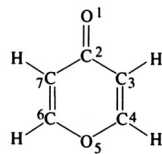


図 6.26 カルボニル型酸素とエーテル型酸素を含む分子

表 6.2 ヘテロ原子のパラメータ

原子X	a_x	結合XY	b_{xy}
$\dot{\text{N}}$	0.5	CN	1.0
$\ddot{\text{N}}$	1.5	C=N	0.8
$\dot{\text{O}}$	1.0	C=O	1.0
$\ddot{\text{O}}$	2.0	C-O	0.8
F	3.0	N-O	0.7
Cl	2.0	C-F	0.7
Br	1.5	C-Cl	0.4
		C-Br	0.3

	O1	C2	C3	C4	O5	C6	C7
$x+1$	1	0	0	0	0	0	0
1	x	1	0	0	0	0	0
	0	1	x	1	0	0	0
	0	0	1	x	0.8	0	0
	0	0	0	0.8	$x+2$	0.8	0
	0	0	0	0	0.8	x	1
	0	1	0	0	0	1	x

Streitwieser Jr., A.: Molecular Orbital Theory for Organic Chemists, John Wiley & Sons, New York (1961)

O₁はカルボニル型, O₅はエーテル型酸素である.

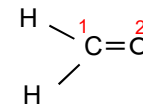
ホルムアルデヒド

π 電子系に参加している原子軌道は炭素原子と酸素原子の2p軌道であるから、原子軌道数は2個である。炭素原子が1個、酸素原子が1個の電子を π 電子系に出している2 π 電子系である。

炭素原子 $\alpha_{C1} = \alpha$

酸素原子 $\alpha_{O2} = \alpha + 1.0 \times \beta = \alpha + \beta$

共鳴積分 $\beta_{C=O} = 1.0 \times \beta = \beta$



永年方程式を解くとエネルギー固有値 E が求まる.

$$\begin{vmatrix} \alpha_{C1} - E & \beta_{C=O} \\ \beta_{C=O} & \alpha_{O2} - E \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{\alpha - E}{\beta} = x$$

$$\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

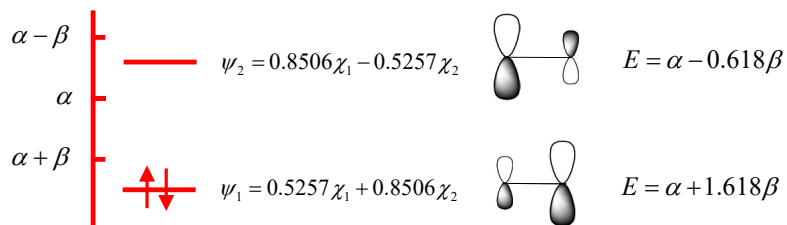
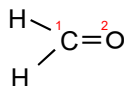
$$x = \begin{cases} 0.618 \\ -1.618 \end{cases}$$

$$\sqrt{5} = 2.236$$

$$E = \alpha - \beta x$$

$$x = 0.618, -1.618$$

$$E = \begin{cases} \alpha - 0.618\beta \\ \alpha + 1.618\beta \end{cases}$$



全 π 電子エネルギー

酸素原子O₂の上に π 電子が偏っている

$$E_{\pi} = \sum_{\mu=1}^{\text{HOMO}} n_{\mu} E_{\mu} = 2 \times (\alpha + 1.618\beta) = 2\alpha + 3.236\beta$$

分子軌道係数を求める

$$\psi = c_1 \chi_1 + c_2 \chi_2$$

永年方程式

$$\begin{pmatrix} \alpha - E & \beta \\ \beta & \alpha + \beta - E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$$

(1) $E = \alpha + 1.618\beta$ を代入する

規格化条件 $c_1^2 + c_2^2 = 1$ を適用する

$$\begin{pmatrix} -1.618\beta & \beta \\ \beta & -1.618\beta + \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$c_1^2 + (1.618c_1)^2 = 1$$

$$c_1^2 + 2.618c_1^2 = 1$$

$$3.618c_1^2 = 1$$

$$c_1^2 = 0.2764$$

$$c_1 = 0.5257$$

$$c_2 = 0.8506$$

$$\begin{pmatrix} -1.618 & 1 \\ 1 & -0.618 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -1.618c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - 0.618c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore c_2 = 1.618c_1$$

$$\psi_1 = 0.5257 \chi_1 + 0.8506 \chi_2$$

(2) $E = \alpha - 0.618\beta$ を代入する 規格化条件 $c_1^2 + c_2^2 = 1$ を適用する

$$\begin{pmatrix} 0.618\beta & \beta \\ \beta & 0.618\beta + \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0.618 & 1 \\ 1 & 1.618 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 0.618c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + 1.618c_2 = 0 \end{cases}$$

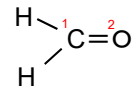
$$\therefore c_2 = -0.618c_1$$

$$c_1^2 + (-0.618c_1)^2 = 1$$

$$c_1^2 + 0.3819c_1^2 = 1$$

$$1.3819c_1^2 = 1$$

$$c_1^2 = 0.7236$$

$$\begin{cases} c_1 = 0.8506 \\ c_2 = -0.5257 \end{cases}$$


$$\psi_2 = 0.8506\chi_1 - 0.5257\chi_2$$

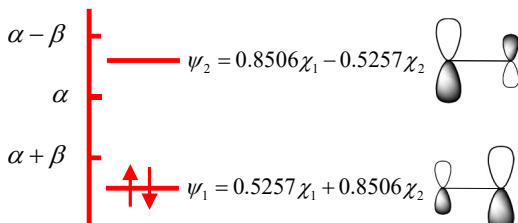
$$E = \alpha - 0.618\beta$$

$$\psi_1 = 0.5257\chi_1 + 0.8506\chi_2$$

$$E = \alpha + 1.618\beta$$

HOMO (結合性分子軌道 ψ_1)では、 π 電子が炭素原子から電気陰性な酸素に移動して分極していること、またLUMO (反結合性軌道 ψ_2)では、逆に炭素原子上に大きく分布しており、電子を受け入れる求核反応は炭素原子上で起こり易いことが理解できる。

ホルムアルデヒド



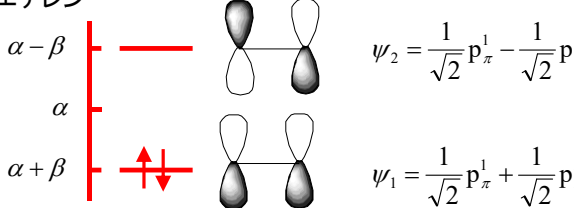
結合次数 $P_{12} = 2c_{11}c_{21} = 2 \times 0.5257 \times 0.8506 = 0.8943$

電子密度 $q_1 = \sum_{\mu=1}^1 2c_{1\mu}^2 = 2c_{11}^2 = 2 \times (0.5257)^2 = 0.5527$

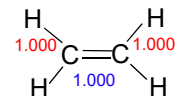
$q_2 = \sum_{\mu=1}^1 2c_{2\mu}^2 = 2c_{21}^2 = 2 \times (0.8506)^2 = 1.447$

結合性分子軌道 ψ_1 では、 π 電子密度は炭素原子で0.55、酸素原子で1.45であり、酸素原子上に π 電子が多く集まっており、炭素原子に陰イオンなどの電子過剰分子が接近しやすい電子構造になっている。

エチレン



$$\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}p_{\pi}^1 - \frac{1}{\sqrt{2}}p_{\pi}^2$$

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}p_{\pi}^1 + \frac{1}{\sqrt{2}}p_{\pi}^2$$


結合次数 $P_{12} = 2c_{11}c_{21} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 1.000$

電子密度 $q_1 = \sum_{\mu=1}^1 2c_{1\mu}^2 = 2c_{11}^2 = 2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1.000$

$q_2 = \sum_{\mu=1}^1 2c_{2\mu}^2 = 2c_{21}^2 = 2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1.000$

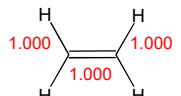
全 π 電子エネルギー $E_{\pi} = \sum_{\mu=1}^{\text{HOMO}} n_{\mu} E_{\mu} = 2 \times E_1 = 2 \times (\alpha + \beta) = 2\alpha + 2\beta$

孤立したC=C二重結合

各炭素原子上の π 電子密度: 1.000

結合次数: 1.000

全 π 電子エネルギー: $2\alpha + 2\beta$ ($E_{C=C}$)



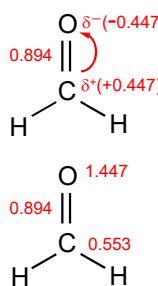
孤立したC=O二重結合

酸素原子上の π 電子密度: 1.447

炭素原子上の π 電子密度: 0.553

結合次数: 0.894

全 π 電子エネルギー: $2\alpha + 3.236\beta$ ($E_{C=O}$)



(1)永年方程式を書け. ただし, 原子には図のように番号を付け, 酸素原子に対するパラメータはスライトウィーザーがまとめた値を用いる.

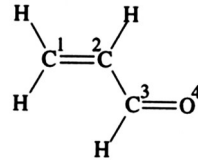
アクリルアルデヒド(アクロレイン, acrolein)

炭素原子, 酸素原子ともに電子1個ずつ, 合計4個の電子をπ電子系に出している4π電子系である.

炭素原子 $\alpha_{C1}=\alpha_{C2}=\alpha_{C3}=\alpha$

酸素原子 $\alpha_{O4}=\alpha+1.0 \times \beta=\alpha+\beta$

共鳴積分 $\beta_{C=O}=1.0 \times \beta=\beta$



アクリルアルデヒド

永年方程式

$$\begin{pmatrix} \alpha-E & \beta & 0 & 0 \\ \beta & \alpha-E & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha-E & \beta_{C=O} \\ 0 & 0 & \beta_{C=O} & \alpha_{O4}-E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = 0$$

ヘテロ原子のパラメータを代入する

$$\begin{pmatrix} \alpha-E & \beta & 0 & 0 \\ \beta & \alpha-E & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha-E & \beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha+\beta-E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = 0$$

$\frac{\alpha-E}{\beta} = x$ とする

永年方程式は

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = 0$$

永年行列式は

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = 0$$

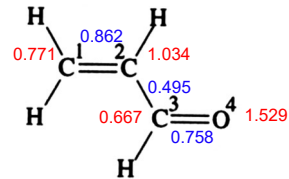
単純ヒュッケルMO法計算出力例

Simple Huckel Method Calculation

Acrylic aldehyde
File of Result Data = Acrylic aldehyde
Number of Pi-orbitals = 4
Number of Electrons = 4
Lower Triangle of Huckel Secular Equation
1 2 3 4
1: 0.00
2: 1.00 0.00
3: 0.00 1.00 0.00
4: 0.00 0.00 1.00 1.00

Orbital Energies and Molecular Orbitals

	1	2	3	4
-x	1.87939	1.00000	-0.34730	-1.53209
Occp	2.00	2.00	0.00	0.00
1	0.22801	0.57735	0.65654	0.42853
2	0.42853	0.57735	-0.22801	-0.65654
3	0.57735	0.00000	-0.57735	0.57735
4	0.65654	-0.57735	0.42853	-0.22801



アクリルアルデヒド

Total Pi-Electron Energy = (4) x alpha + (5.75877) x beta
Resonance Energy = (-1.75877) x beta

Electron Population on atom

atom	Population
1	0.77065
2	1.03393
3	0.66667
4	1.52875

孤立したC=C結合2個と比較した共鳴エネルギーである。孤立したC=C結合とC=O結合の和と比較する方が良い。

Bond-Order Matrix

2- 1	0.86209	3- 1	0.26329	3- 2	0.49482
4- 1	-0.36727	4- 2	-0.10398	4- 3	0.75811

単純ヒュッケルMO法計算出力例

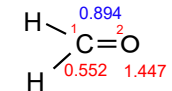
Simple Huckel Method Calculation

Formaldehyde
File of Result Data = Formaldehyde.txt
Number of Pi-orbitals = 2
Number of Electrons = 2
Lower Triangle of Huckel Secular Equation
1 2
1: 0.00
2: 1.00 1.00

Orbital Energies and Molecular Orbitals

	1	2
-x	1.61803	-0.61803
Occp	2.00	0.00
1	0.52573	0.85065
2	0.85065	-0.52573

Total Pi-Electron Energy = (2) x alpha + (3.23607) x beta
Resonance Energy = (1.23607) x beta



Electron Population on atom

atom	Population
1	0.55279
2	1.44721

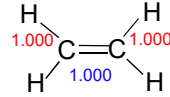
Bond-Order Matrix

2- 1	0.89443
------	---------

単純ヒュッケルMO法計算出力例

Simple Huckel Method Calculation

Ethylene
 File of Result Data = Ethylene.txt
 Number of Pi-orbitals = 2
 Number of Electrons = 2
 Lower Triangle of Huckel Secular Equation
 1 2
 1: 0.00
 2: 1.00 0.00



Orbital Energies and Molecular Orbitals

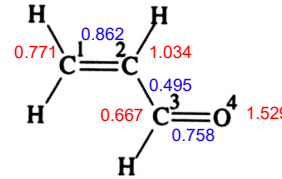
	1	2
-x	1.00000	-1.00000
Occp	2.00	0.00
1	-0.70711	0.70711
2	-0.70711	-0.70711

Electron Population on atom
 atom Population
 1 1.00000
 2 1.00000

Bond-Order Matrix
 2- 1 1.00000

Total Pi-Electron Energy = (2) x alpha + (2.00000) x beta
 Resonance Energy = (0.00000) x beta

(3)4個の分子軌道 $\phi[n]$ とその軌道エネルギー E は次の通りである。各原子の電子密度と各結合の結合次数を求めよ。



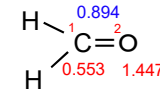
1. 結合次数

C_2 と C_3 の間の結合次数 P_{23} は0.50である。二重結合性があり、 π 電子が非局在化していることを示す。

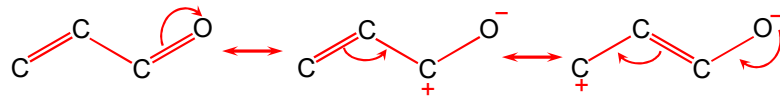
2. π 電子密度

酸素原子の π 電子密度が1.53と大きい。電気陰性度の高い酸素原子に π 電子が引き寄せられていることを示す。ホルムアルデヒドの酸素原子よりも π 電子密度が大きく、 C_1 および C_2 からも π 電子が流れ込んでいる。

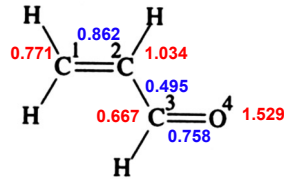
アクリルアルデヒド



ホルムアルデヒド



アクリルアルデヒドの共鳴構造式



アクリルアルデヒド

共鳴構造式において、 C_1 と C_3 が δ^+ 、 C_2 は電荷なし、 O_4 は δ^- 。

ヒュッケルMO法による電子密度の計算値と、共鳴構造式に現れる電荷が良く一致している。

(4) $C=C$ 結合と $C=O$ 結合との共役による安定化エネルギーを計算して、エチレン、ホルムアルデヒドの結果と比較して議論せよ。

アクリルアルデヒドの π 電子エネルギーは

$$E_{\pi} = \sum_{\mu=1}^{HOMO} n_{\mu} E_{\mu} = 2E_1 + 2E_2$$

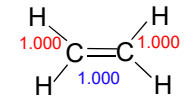
$$= 2(\alpha + 1.879\beta) + 2(\alpha + \beta) = 4\alpha + 5.759\beta$$

である。孤立した $C=C$ 二重結合および $C=O$ 二重結合の π 電子エネルギーを引き算するとアクリルアルデヒドの非局在化エネルギーが求められる。

$$E_{Deloc.} = (4\alpha + 5.759\beta) - \{(2\alpha + 2\beta) + (2\alpha + 3.236\beta)\}$$

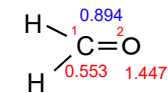
$$= 0.523\beta$$

アクリルアルデヒドの非局在化エネルギーは 0.523β であり、ブタジエンの 0.48β よりも大きい。



π 電子エネルギー

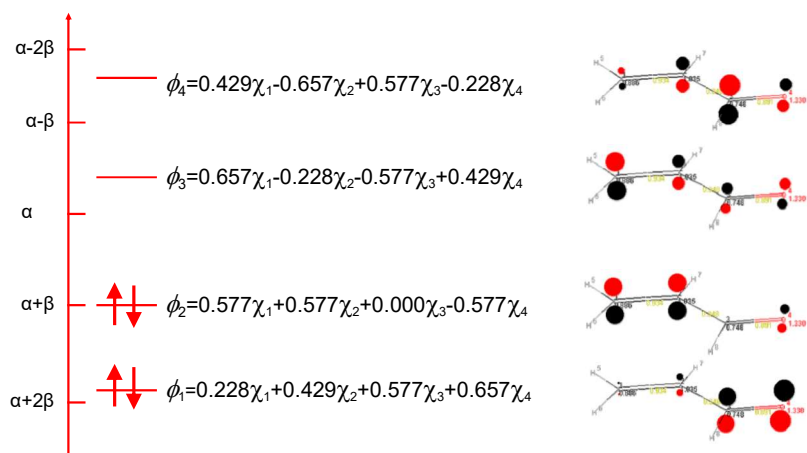
$$E_{\pi} = 2\alpha + 2\beta$$



π 電子エネルギー

$$E_{\pi} = 2\alpha + 3.236\beta$$

(2)アクリルアルデヒド(アクロレイン)の分子軌道ダイヤグラムを描け。

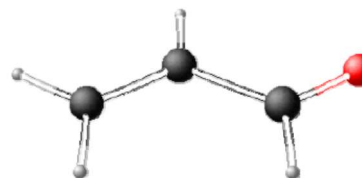


ドイツ, ブラウンシュヴァイク工科大学の授業資料から
Electron configuration based on Hückel's
mathematical treatment of acrolein

With acrolein as example, Hückel's method to calculate molecular orbitals and the results are explained. (chapter based on a work by Dr. Horst Bögel).

First, we build a *secular determinant* which describes the structure of acrolein. The atomic parameter are found within the diagonal, for a carbon atom, x is inserted, for heteroatoms X the sum $x+h_X$. The value 1 is inserted for C-C bonds, a value k_{C-X} for C-X bonds. For the majority of cases, the needed values for h_X and k_{C-X} can be taken from the table below.

The acrolein molecule ($\text{CH}_2 = \text{CH} - \text{CH} = \text{O}$)



X	h_X	C-X	k_{C-X}
F	2.84	C-F	0.68
Cl	1.45	C-Cl	0.57
Br	1.16	C-Br	0.38
J	0.78	C-J	0.19
O	2.06	C-O:	1.31
:O-CH ₃	1.96	C=O	1.93
O	1.18	C-N:	1.30
:N	1.47	C=N:	1.06
:N	0.83	C-CH ₃	0.18
:CH ₃	0.88	N-O	1.95

from: G. DERFLINGER, H. LISCHKA, Mh. Chemie 100 (1969) 1003

http://www.pci.tu-bs.de/aggericke/PC4e/Kap_II/Hueckel_Acrolein.html

Acrolein's secular determinant is

$$\begin{vmatrix} x & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & x & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & x & 1.93 \\ 0.0 & 0.0 & 1.93 & x+1.18 \end{vmatrix}$$

Transformation of this determinant yields an equation of the fourth degree:

$$x^4 + 1.18x^3 - 5.725x^2 - 2.36x + 3.725 = 0$$

The zeros of this equation or, respectively, the eigenvalues of the determinant are

$$x_1 = -2.7654 \quad x_2 = -1.0207 \quad x_3 = 0.6880 \quad x_4 = 1.9182$$

The four eigenvalues and the following equation yields the energy levels of the molecular orbitals

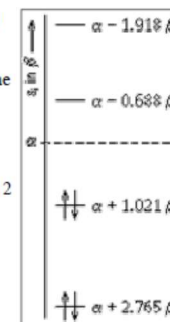
$$E_i = \alpha - x_i \beta$$

These levels are shown in the diagram here. Empiric values are $\alpha = -11 \text{ eV}$ and $\beta = -2.5 \text{ eV}$.

The total energy of the molecule equals the sum of the electrons' energies in the respective molecular orbitals. The total energy of the π -electrons is

$$E = \sum_{i=1}^4 b_i \cdot E_i$$

where b_i represents the occupancy of orbitals with the values 0 (empty), 1 and 2 (pair of electrons).



For the acrolein molecule in the ground state, the total energy of the four π -electrons is

$$E = 2(\alpha + 2.7654\beta) + 2(\alpha + 1.0207\beta) = 4\alpha + 7.5722\beta = -25.0695 \text{ eV}$$

Eigenvectors

To any solution x_i there is an *eigenvector* c_i which is calculated as follows:

$$\sum_{R=1}^4 (h_{RS} - E_i \delta_{RS}) c_{iR} = 0$$

If there is a bond R-S, then $h_{RS} = \beta_{RS}$, otherwise $h_{RS} = 0$ and $\delta_{RS} = 1$ for R=S, otherwise $\delta_{RS} = 0$.

The following table contains the results:

	MO 1	MO 2 HOMO	MO 3 LUMO	MO 4
eigenvalue	-2.7654	-1.0207	0.6880	1.9182
atom 1	0.0919	-0.6593	-0.6990	-0.2613
atom 2	0.2542	-0.6730	0.4809	0.5012
atom 3	0.6111	-0.0276	0.3682	-0.7002
atom 4	0.7439	0.3341	-0.3804	0.4362

The obtained molecular orbitals are depicted below:

Bond order, atomic charge, π -electron density

The following electron configuration represents the ground state of the molecule:

occupancy: $\Psi_1^2 \Psi_2^2 \Psi_3^0 \Psi_4^0$

The formula

$$q_R = p_{RR} = \sum_i b_i c_{iR}^2 \quad \text{and} \quad p_{RS} = \sum_i b_i c_{iR} c_{iS}$$

allow to establish a *p-matrix* that, in turn, serves to construct a *molecule diagram*.

The values within diagonal of the matrix indicate the electron density (p_{RR}) near the respective atoms.

Example: density of electrons near carbon atom $C_{(2)}$

$$p_{RR} = 2 * (0.2542)^2 + 2 * (0.6730)^2 + 0 * (0.4809)^2 + 0 * (0.5012)^2 = 1.0351$$

The *formal charge* of any atom is: $Q_R = N_R - p_{RR}$.

Besides the diagonal of the matrix, the *bond order* appears.

Example: bond order for the π -bond C=O between carbon and oxygen

$$p_{RS} = 2 * (0.6111 * 0.7439) + 2 * (0.0276 * -0.3341) + 0 * (0.3682 * -0.3804) + 0 * (-0.7002 * 0.4362) = 0.8909$$

p-Matrix

	1	2	3	4
1	0.8863			
2	0.9342	1.0351		
3	0.0	0.3479	0.7485	
4	0.0	0.0	0.8909	1.3302

対角要素は電子密度
非対角要素は結合次数

直鎖状ポリエンに対する一般式

直鎖状ポリエンの炭素原子の番号付け

ポリエンのヒュッケル分子軌道をエネルギーの低い順に番号を付ける

$$\phi_k = \sum_{r=1}^n c_{rk} \chi_r$$

$$\varepsilon_k = \alpha + x_k \beta$$

x_k と c_{rk} に対して次のような一般式が得られている。

$$x_k = 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

$$c_{rk} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin\left(\frac{kr\pi}{n+1}\right) \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

ブタジエンの場合

$n = 4$

$$x_k = 2 \cos\left(\frac{k\pi}{5}\right) \quad \varepsilon_k = \alpha + x_k \beta$$

$$x_4 = 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -1.618 \quad \varepsilon_4 = \alpha + x_4 \beta = \alpha - 1.618\beta$$

$$x_3 = 2 \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = -0.618 \quad \varepsilon_3 = \alpha + x_3 \beta = \alpha - 0.618\beta$$

$$x_2 = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 0.618 \quad \varepsilon_2 = \alpha + x_2 \beta = \alpha + 0.618\beta$$

$$x_1 = 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1.618 \quad \varepsilon_1 = \alpha + x_1 \beta = \alpha + 1.618\beta$$

環状ポリエンに対する一般式

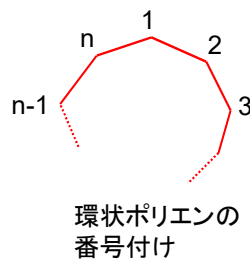
n個の炭素からなる環状ポリエンについて
ヒュッケル分子軌道とエネルギーの一般式
が得られている。

軌道エネルギー $\varepsilon_k = \alpha + x_k \beta$ はエネルギーの
高い順に

$$x_k = 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

また、LCAO係数 c_{rk} は

$$c_{rk} = \sqrt{\frac{2}{n}} \exp\left(ir \frac{2k\pi}{n}\right) \\ = \sqrt{\frac{2}{n}} \left\{ \cos\left(\frac{2k\pi}{n} r\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n} r\right) \right\} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$



環状ポリエンに対する一般式

$$x_k = 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

$$c_{rk} = \sqrt{\frac{2}{n}} \exp\left(ir \frac{2k\pi}{n}\right) \\ = \sqrt{\frac{2}{n}} \left\{ \cos\left(\frac{2k\pi}{n} r\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n} r\right) \right\} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

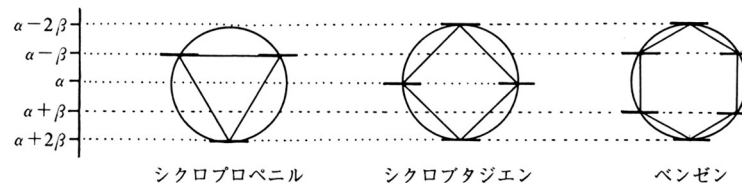


図 6.19 環状ポリエンの HMO 軌道エネルギー
円に内接させて各頂点の位置で軌道エネルギーがわかる。

シクロブタジエンの場合

$n=4$

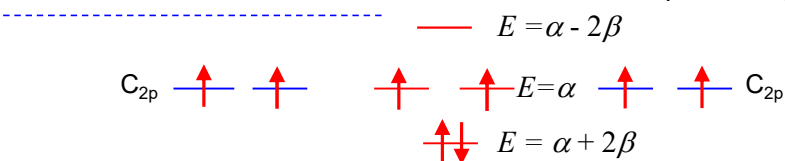
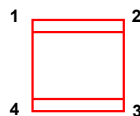
$$x_k = 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{4}\right) \quad \varepsilon_k = \alpha + x_k \beta$$

$$x_4 = 2 \cos\left(\frac{4\pi}{2}\right) = 2 \quad \varepsilon_4 = \alpha + x_4 \beta = \alpha + 2\beta$$

$$x_3 = 2 \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \quad \varepsilon_3 = \alpha + x_3 \beta = \alpha$$

$$x_2 = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) = -2 \quad \varepsilon_2 = \alpha + x_2 \beta = \alpha - 2\beta$$

$$x_1 = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \varepsilon_1 = \alpha + x_1 \beta = \alpha$$



7月8日 学生番号, 氏名

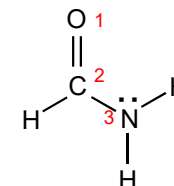
問題. ホルムアミドのヒュッケル分子軌道について次の問に答えよ。

(1) 永年方程式を書け。ただし、原子には図のように番号を付け、酸素原子および窒素原子に係わるパラメータはスライトウィーザーがまとめた値を用いる。

(2) 3個の分子軌道 ϕ とその軌道エネルギー E は下表の通りである。ホルムアミドの分子軌道ダイヤグラムを描け。

(3) 各原子の電子密度と各結合の結合次数を求めよ。

	$\chi[1]$	$\chi[2]$	$\chi[3]$	E
	O	C	N	
$\phi[1]$	0.502	0.499	0.706	$\alpha + 1.995\beta$
$\phi[2]$	0.724	0.206	-0.659	$\alpha + 1.283\beta$
$\phi[3]$	0.474	-0.842	0.259	$\alpha - 0.778\beta$



(4) ホルムアミドの共鳴構造式を描き、ホルムアルデヒドのヒュッケル分子軌道計算結果と比較して、各原子上の電子密度と結合次数について議論せよ。